

## 3ο Διαγώνισμα - Θεμελιώδεις Έννοιες Των Μαθηματικών

### ΔΙΑΡΚΕΙΑ 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

#### Θέμα 1

(α) Για τυχαία σύνολα  $A, B, \Gamma$ , δείξτε ότι:

(i)  $(A \cup \Gamma) \setminus (B \cup \Gamma) = A \setminus (B \cup \Gamma)$

(ii)  $(A \cup \Gamma) \setminus (B \cup \Gamma) \subseteq (A \setminus B) \cup \Gamma$ .

(β) Να δώσετε κατάλληλο παράδειγμα το οποίο να αποδεικνύει ότι στο ζήτημα (a.ii) δεν ισχύει πάντα η ισότητα.

#### Θέμα 2

Στο σύνολο  $\mathbb{R}$  ορίζουμε τη σχέση  $\sim$  κατά την οποία

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 2k\pi$$

(α) Να δείξετε ότι η  $\sim$  είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρείτε το σύνολο ηλίκο  $\mathbb{R} / \sim$ .

(β) Εξετάστε αν τα στοιχεία

(i)  $\frac{13\pi}{6}$  και  $-\frac{23\pi}{6}$  είναι στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

(ii)  $\frac{13\pi}{6}$  και  $\frac{17\pi}{3}$  είναι στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

(γ) Εξετάστε αν η  $\sim$  είναι αντισυμμετρική.

#### Θέμα 3

Στο  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ορίζουμε τις σχέσεις  $\sigma, r$  κατά τις οποίες

$$\forall (m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (m_1, n_1) \sigma (m_2, n_2) \iff m_1 + n_1 \leq m_2 + n_2$$

και

$$\forall (m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (m_1, n_1) r (m_2, n_2) \iff m_1 \leq m_2 \wedge n_1 \leq n_2$$

Δείξτε ότι η  $\sigma$  δεν είναι σχέση διάταξης και η  $r$  είναι σχέση διάταξης. Είναι η  $r$  ολική διάταξη στο σύνολο  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ;

#### Θέμα 4

Δίνεται το σύνολο  $E = \{a, b, c, d, e\}$  και το υποσύνολο αυτού,  $A = \{a, d, e\}$ . Να ορίσετε μια σχέση διάταξης στο  $E$  ως προς την οποία το  $c$  να είναι το μέγιστο στοιχείο του  $E$ , τα  $a, e$  να είναι τα μόνα ελαχιστικά στοιχεία του  $E$ , το  $A$  να μην έχει infimum, τα  $b$  και  $c$  να είναι άνω φράγματα του  $A$ . Υπάρχει το  $\sup A$ ; Αν ναι, ποιά είναι αυτό;

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**